TEMA 8. Contrastes de hipótesis.

En este capítulo se expondrá el contraste o test de hipótesis estadísticas, que está muy relacionado con la «estimación por intervalos» del capítulo anterior. Van a definirse importantes conceptos en este capítulo. Así:

Hipótesis estadística: Es cualquier afirmación que hagamos, verdadera o falsa, sobre alguna característica desconocida de la población.

Contraste paramétrico: Si la hipótesis formulada se refiere *al valor* de un parámetro desconocido *e* de la población.

Contraste no paramétrico: Si la hipótesis formulada se refiere a la *forma* que tiene la función de probabilidad [v. gr. la función de cuantía, o la función de densidad *f(x, 2)]* de la población.

En este capítulo sólo nos referiremos a los contrastes paramétricos.

8.1 Al finalizar el tema el alumno debe conocer........

- ✓ Características de la estimación utilizando los contrastes o test de hipótesis.
- ✓ Tipos de hipótesis estadísticas en los contrastes paramétricos.
- ✓ Región crítica y la región de aceptación en un contraste de hipótesis paramétrico.
- ✓ Diferentes tipos de errores que podemos cometer en un contraste de hipótesis paramétrico.
- ✓ Potencia y función de potencia de un contraste de hipótesis paramétrico.
- ✓ El valor probabilístico o P-valor.
- ✓ Contraste de hipótesis para la media de una población normal con desviación típica conocida.
- ✓ Contraste de hipótesis para la media de una población normal con desviación típica desconocida.

8.2 Características de la estimación utilizando los contrastes o test de hipótesis.

Cuando se extrae una muestra aleatoria de una población, la evidencia obtenida de la misma puede usarse para realizar inferencias sobre las características de la población. Como hemos visto, una posibilidad es estimar los parámetros desconocidos de la población mediante el cómputo de estimadores puntuales o intervalos de confianza. Alternativamente, la información muestral puede utilizarse para verificar la validez de una conjetura, o hipótesis, que el investigador realiza sobre la población. Por ejemplo:

- Un analista afirma que la renta media anual de las familias residentes en la Comunidad de Madrid es al menos 10.000 Euros. Para verificar esta afirmación, se realiza un estudio utilizando una muestra aleatoria de familias residentes en la comunidad y se infiere el resultado a partir del resultado muestral.
- Una empresa recibe un cargamento de piezas y solo aceptará el envió si no hay más de un 5% de piezas defectuosas. La decisión de si aceptar la remesa puede basarse en el examen de una muestra aleatoria de piezas.
- Una entidad financiera afirma que, en estos momentos de incertidumbre e inestabilidad bursátil, el 70 % de sus clientes invierte en fondos conservadores. Para analizar si es así, recoge las opiniones de una muestra aleatoria de sus clientes.

Los ejemplos puestos tienen algo en común. La hipótesis se formula sobre la población y las conclusiones sobre la validez de esta hipótesis se basan en la información muestral.

Para hacer más general nuestra exposición, denominaremos por θ el parámetro poblacional de interés (por ejemplo, la media poblacional, la varianza o una proporción). Supongamos que se formula una hipótesis sobre este parámetro, y después tomamos una muestra para ver si la hipótesis es cierta.

La hipótesis que contrastamos se llama hipótesis nula (H_0) y la contrastamos con la hipótesis alternativa (H_1). Después, a partir de los resultados obtenidos en la muestra, o bien rechazamos la hipótesis nula a favor de la alternativa, o bien no rechazamos la hipótesis nula y suponemos que nuestra estimación inicial del parámetro poblacional podría ser correcta. El hecho de no rechazar la hipótesis nula no implica que ésta sea cierta, significa simplemente que los datos de la muestra son insuficientes para inducir un rechazo de la hipótesis nula. Es decir, nunca se puede probar sin lugar a dudas que la hipótesis nula es correcta y por consiguiente nunca es posible aceptarla como tal.

Tanto la hipótesis nula como la hipótesis alternativa pueden ser simples o compuestas:

- Si una hipótesis, nula o alternativa, designa un único valor, llamado θ_0, para el parámetro poblacional θ en este caso, se dice que la hipótesis es simple.
- La hipótesis, nula o alternativa, también puede designar un rango de valores para el parámetro desconocido. Una hipótesis de este tipo se denomina compuesta y será cierta para más de un valor del parámetro poblacional.

En muchas aplicaciones, se contrasta una hipótesis nula simple digamos: $H_0 : \theta = \theta_0$

- Frente a una alternativa compuesta, en algunos casos sólo interesan alternativas a un lado de la hipótesis nula:

  $H_1 : \theta > \theta_0$,o bien, $H_1 : \theta < \theta_0$, las hipótesis alternativas de este tipo, se denominan alternativas unilaterales.
- Frente a la alternativa general, de que el valor de θ es cualquiera distinto de θ_0, es decir:

  $H_1 : \theta \neq \theta_0$, las hipótesis alternativas de este tipo se denominan alternativas bilaterales.

Volviendo a los ejemplos iniciales:

- Sea θ renta media anual de las familias residentes en la Comunidad de Madrid. La hipótesis nula es que esta reta media anual es al menos 10.000 Euros (es decir, 10.000 Euros o más), luego tenemos una hipótesis nula compuesta:

  $H_0 : \theta \geq 10.000$

  la alternativa obvia es que la renta media anual es inferior a 10.000 Euros, es decir:

  $H_1 : \theta < 10.000$

- La compañía resuelve aceptar envíos de piezas siempre que no tenga evidencia para sospechar que más del 5 % son defectuosas. Denotemos por θ la proporción poblacional de piezas defectuosas. La hipótesis nula aquí es que esta proporción es como mucho 0,005, es decir:

$H_0 : \theta \leq 0{,}05$

basándose en la información muestral, se contrasta esta hipótesis frente a la alternativa:

$H_1 : \theta > 0{,}05$

- Como hipótesis de trabajo, la entidad financiera está interesada en la proporción de clientes que cumple cierta característica. Si θ es la proporción de clientes que invierte en fondos conservadores, la hipótesis nula es:

  $H_0 : \theta = 0{,}70$

  esta hipótesis nula puede contrastarse frente a la hipótesis alternativa bilateral, en la que un porcentaje distinto del 70 % invertirá en fondos conservadores.

  $H_1 : \theta \neq 0{,}70$

Después de especificar las hipótesis y de recoger la información muestral, debe tomarse una decisión sobre la hipótesis nula. Las dos posibilidades que hay son no rechazar la hipótesis nula, o rechazarla a favor de la alternativa. Con el fin de llegar a una de estas conclusiones, se adopta una regla de decisión basada en la evidencia muestral. Esta regla de decisión es un enunciado que emitimos para determinar si se rechaza la hipótesis nula. Especifica el valor crítico de los resultados muestrales.

Si sólo se dispone de una muestra de la población, entonces el parámetro poblacional no se conocerá con exactitud. Por consiguiente, no se puede saber con seguridad si la hipótesis nula es cierta o falsa. Por tanto, cualquier regla de decisión adoptada tiene cierta probabilidad de llegar a una conclusión errónea sobre el parámetro poblacional de interés. De hecho, pueden cometerse dos tipos de errores:

- El Error de Tipo I, es rechazar la hipótesis nula cuando es cierta. Si la regla de decisión es tal que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta es α, entonces α se llama nivel de significación del contraste. Por tanto, la probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando es cierta es $(1-\alpha)$.
- El Error de Tipo II, ocurre cuando no se rechaza la hipótesis nula y es falsa. Supongamos que para una determinada regla de decisión particular, la probabilidad

de cometer este error se denota por β. Entonces, la probabilidad de rechazar una hipótesis nula falsa es $(1-\beta)$ y se denomina potencia del contraste.

Lo ideal sería que las probabilidades de los dos tipos de errores fuesen lo más pequeñas posible. Sin embargo, hay una clara compensación entre los dos errores. Cuando se ha tomado una muestra, cualquier modificación de la regla de decisión que haga menos verosímil rechazar una hipótesis nula cierta, inevitablemente, se traducirá en mayor verosimilitud de aceptar esta hipótesis cuando es falsa. Por tanto, al disminuir la probabilidad de cometer un Error de Tipo I, aumenta la probabilidad de cometer un Error de Tipo II. La única forma de disminuir simultáneamente las dos probabilidades de error será obtener más información sobre el verdadero valor del parámetro poblacional, tomando una muestra mayor.

Habitualmente, lo que se hace en la práctica, es fijar la probabilidad de cometer un Error de Tipo I a un nivel deseado, es decir, se fija el nivel de significación (los niveles de significación más corrientes, valores α, son 1%, 5% y 10 %). Esto determina la regla de decisión adecuada, que a su vez determina la probabilidad de un error de Tipo II.

Hemos visto hasta ahora que, puesto que la regla de decisión queda determinada por el nivel de significación elegido, el concepto de potencia no forma parte directa de la decisión de rechazar la hipótesis nula. Sin embargo, el cálculo de la potencia, que resulta de la elección de un nivel de significación particular, proporciona al investigador una valiosa información sobre las propiedades de la regla de decisión. Para un nivel de significación dado, cuanto mayor sea la muestra, mayor será la potencia del contraste. Para decidir lo grande que será la muestra, el investigador debe buscar equilibrio entre los beneficios de aumentar la potencia y el coste de adquirir información muestral adicional.

- **Fases a realizar en un contraste de hipótesis.**

En el contraste de hipótesis utilizamos un conjunto de reglas que nos permitirán determinar cual de entre las dos hipótesis establecidas, la hipótesis nula representada por (H_0), o la hipótesis alternativa (H_1), debe aceptarse como cierta en base los resultados obtenidos de la observación muestral. La hipótesis nula se mantendrá mientras los datos no indiquen una falsedad, nuca se puede afirmar la hipótesis nula, lo único que podemos hacer es aceptarla o rechazarla. Por tanto, y en base a la información muestral, se intentará decidir si esta información nos permite aceptar o rechazar la hipótesis establecida como nula. Se puede distinguir entre dos tipos de hipótesis:

- Paramétricas, se refieren a características de los parámetros poblacionales.
- No paramétricas, relacionadas con las características de la distribución.

1. Formular la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis alternativa (H_1) en términos de probabilidad. La especificación apropiada de la hipótesis nula y alternativa depende de la naturaleza propia del problema en cuestión. Las formas básicas de establecer las hipótesis sobre el parámetro θ son las siguientes:

   $H_0 : \theta \geq \theta_0 \qquad H_1 : \theta < \theta_0$

   $H_0 : \theta \leq \theta_0 \qquad H_1 : \theta > \theta_0$

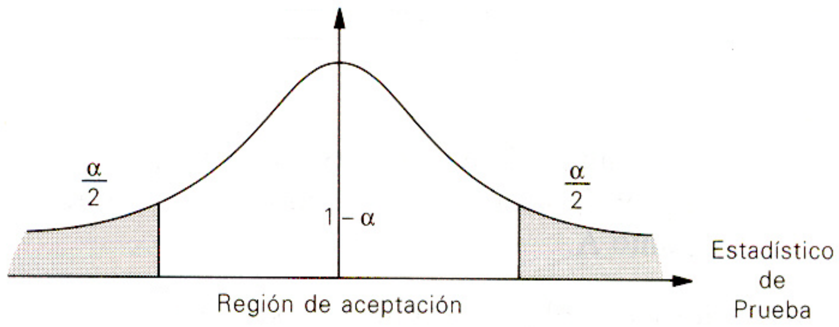
   $H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$

   Las hipótesis deben ser formuladas de tal manera que sean mutuamente excluyentes y complementarias.

2. Determinar el estadístico apropiado, que se utilizará para rechazar o no rechazar la hipótesis nula (H_0).
3. Seleccionar el nivel de significación, valor α .Las hipótesis se contrastan a un nivel de significación elegido, este nivel permite definir la región de rechazo o región critica. El valor del nivel de significación α , indica la importancia o significado que el investigador atribuye a las consecuencias asociadas de rechazar incorrectamente la hipótesis nula (H_0).
4. Determinar la región crítica o región de rechazo y la región de aceptación en la curva de la distribución del estadístico. El conocimiento de la región crítica nos permitirá decidir si se acepta o rechaza la hipótesis nula (H_0) , en función del estadístico elegido y del valor de significación α fijado.

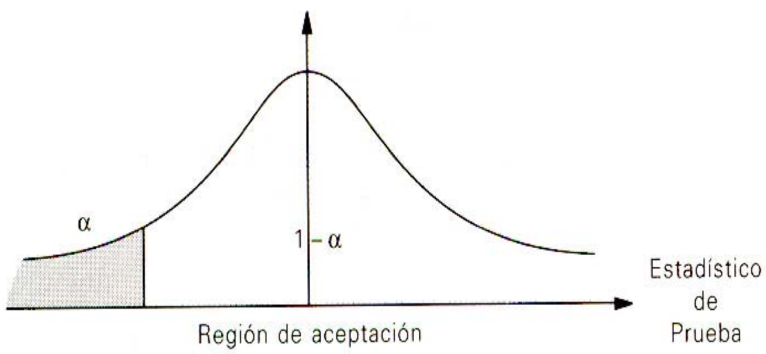
1) $H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_0$



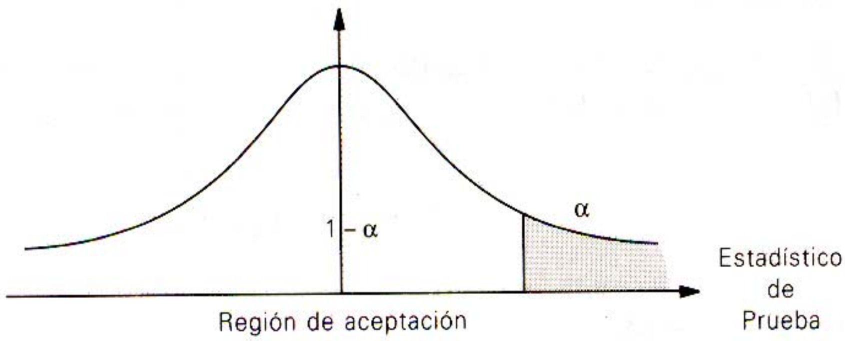
2) $H_0 : \theta \geq \theta_0$

$H_1 : \theta < \theta_0$



3) $H_0 : \theta \leq \theta_0$

$H_1 : \theta > \theta_0$



5. Seleccionar aleatoriamente la muestra y calcular el valor del estadístico. Después de seleccionar de manera aleatoria la muestra, se ha de ver si el valor del estadístico calculado para esta muestra, cae en la región crítica o en la región de aceptación.
6. Interpretación. Si el valor calculado para el estadístico cae dentro de la región crítica, entonces la hipótesis nula (H_0) se rechaza. Y si el valor calculado cae dentro de la región de aceptación, entonces la hipótesis nula (H_0) no se rechaza.

8.3 Valor Probabilístico o P-valor.

Los paquetes informáticos de aplicación estadística nos proporcionan una forma alternativa de tomar la decisión de rechazar o no la hipótesis nula basándose en lo que se denomina valor probabilístico o p-valor.

El software estadístico proporciona la probabilidad de obtener un valor del estadístico de prueba que sea al menos tan improbable o extremo como el valor experimental observado (suponiendo H0 cierta). Es decir, se calcula la probabilidad de rechazo que tendría una región de rechazo que empezase en el valor experimental. Esta probabilidad recibe el nombre de p-valor.

Una vez determinado el p-valor se decide rechazar o no la hipótesis nula comparando este valor con el nivel de significación deseado. ¿Cómo interpretar el p- valor?:

Contraste no significativo: p- valor > α (no se rechaza H_0)

Contraste significativo: p- valor $\leq \alpha$ (se rechaza H_0)

8.4 Relación entre los contrastes de hipótesis y los intervalos de confianza.

Podemos relacionar ambos conceptos de tal manera que si el valor del estimador obtenido a partir de una muestra aleatoria seleccionada, estuviese incluido en el intervalo de confianza construido al nivel 100(1-α)% entonces no se rechazará la hipótesis nula H_0 al 100α% de nivel de significación. En caso contrario se rechazará la hipótesis nula H_0.

Ejemplos:

1. **Ejemplo de contraste para la media de una distribución normal: varianza poblacional conocida.**

Supongamos una población $N(\mu,\delta)$, con δ conocida. El objetivo es contrastar una hipótesis sobre la media poblacional desconocida, mediante una muestra aleatoria simple de tamaño n $(X_1,\cdots,X_n)$.

1) Comencemos con el problema de contrastar la hipótesis nula de que la media poblacional es al menos un cierto valor μ_0, esta hipótesis se representa:

   $H_0 : \mu \geq \mu_0$

   Supongamos que la hipótesis alternativa es:

   $H_1 : \mu < \mu_0$

   Una vez que hemos formulado tanto la hipótesis nula como la hipótesis alternativa, determinamos el estadístico apropiado. Es natural que el contraste sobre la media poblacional se base en la media muestral $\bar{x}$. Como vimos en apartados anteriores, la distribución muestral de la media muestral es normal, con media μ y desviación típica $\delta/\sqrt{n}$. Es decir, la variable aleatoria:

   $Z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\delta/\sqrt{n}}$ sigue una distribución normal estándar $N(0,1)$

   Debemos seleccionar el nivel de significación, valor α. Es decir, establecemos una regla de decisión tal que, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula, cuando es cierta, sea α.

   Para determinar la región de rechazo admitimos que la hipótesis nula es verdadera. Como en este caso, para la hipótesis nula no tenemos un valor concreto si no un rango de valores $(\mu \geq \mu_0)$, debemos elegir un valor concreto para poder obtener la distribución del estadístico media muestral $\bar{x}$ bajo la hipótesis nula $H_0 : \mu \geq \mu_0$ cierta. Seleccionamos el valor $\mu = \mu_0$ que es el menor valor que satisface la desigualdad, siendo entonces el nivel de significación α el máximo. La región de rechazo se obtendría teniendo en cuenta que la variable aleatoria:

$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\delta / \sqrt{n}}$ sigue una distribución normal estándar.

Y la probabilidad de rechazar la hipótesis nula, cuando es cierta:

$$P(\bar{x} < \bar{x}_c / \mu = \mu_0) = \alpha \qquad P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta / \sqrt{n}} < \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\delta / \sqrt{n}} \right) = \alpha$$

tipificando tenemos:

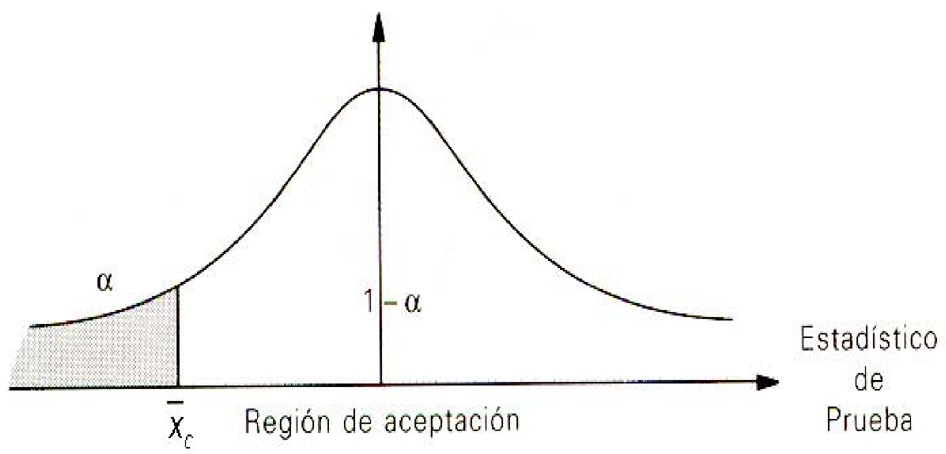
$$P(Z < -z_\alpha) = \alpha$$

$$-z_\alpha = \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\delta / \sqrt{n}} \rightarrow \bar{x}_c = \mu_0 - z_\alpha \delta / \sqrt{n}$$

Sabiendo $\bar{x}_c$ es el valor crítico que delimita la región de rechazo de la región de aceptación, la región de rechazo vendrá determinada por:

$$\bar{x} < \mu_0 - z_\alpha \delta / \sqrt{n}$$

Que la media muestral observada, se encuentre en la región de rechazo o en la región de aceptación, nos permitirá establecer si se rechaza o no rechaza la hipótesis nula.



2) Este razonamiento también es válido en un contraste de la forma:

$H_0 : \mu \leq \mu_0$

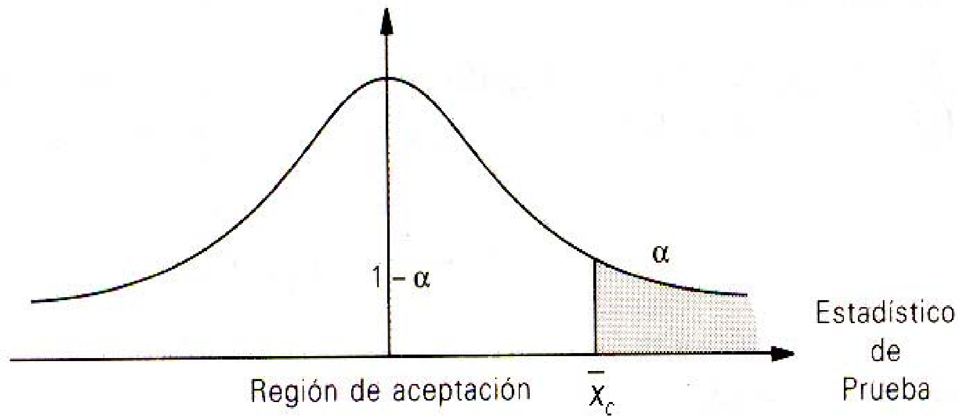
$H_1 : \mu > \mu_0$

En este caso la región de rechazo quedaría definida como aparece en el gráfico y $\bar{x}_c$ valor crítico que delimita la región de rechazo de la región de aceptación sería:

$\bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \delta / \sqrt{n}$

Y por tanto, la región de rechazo vendrá definida por:

$\bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \delta / \sqrt{n}$



3) Los contrastes vistos hasta ahora se diferencian del contraste bilateral:

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

Este tipo de contraste presenta dos regiones de rechazo. Por tanto existirán dos valores críticos (uno inferior y otro superior) que delimitan la región de rechazo de la región de aceptación:

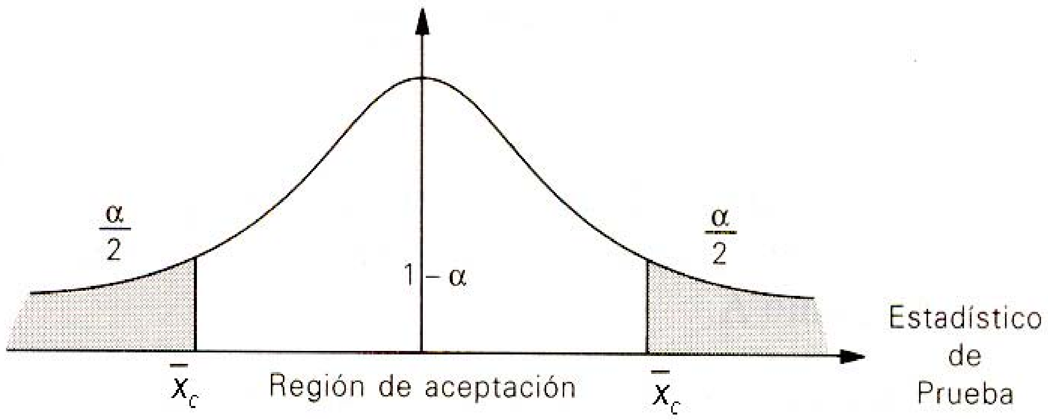
$\bar{x}_{\inf} = \mu_0 - z_{\alpha/2} \dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$ $\qquad$ $\bar{x}_{\sup} = \mu_0 + z_{\alpha/2} \dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$

La región de rechazo viene definida:

$\bar{x} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$; $\bar{x} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$

y la región de aceptación será:

$$\left[\mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \right]$$



Supongamos que disponemos de una muestra aleatoria de n observaciones de una población con media μ y varianza δ^2. Si el tamaño de la muestra es grande (para muestras de 30 o más observaciones) los procedimientos de contraste desarrollados para el caso en el que la varianza poblacional es conocida pueden emplearse cuando es desconocida reemplazando δ^2 por la varianza muestral observada. Además, estos procedimientos resultan aproximadamente válidos incluso si la distribución de la población no es normal.

2. Ejemplo de contraste para la media de una distribución normal: varianza poblacional desconocida.

En este caso consideraremos un nuevo problema de una muestra aleatoria de n observaciones tomadas de una población normal, en el que se quiere contrastar una hipótesis sobre la media poblacional μ . La varianza poblacional no es conocida y el tamaño de la muestra no es muy grande. Los procedimientos aplicados en la sección anterior no son apropiados. En este caso la variable aleatoria:

$t_{n-1} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ sigue una distribución t de Student con $(n-1)$ grados de libertad.

Usando el mismo argumento que se utilizó en el apartado anterior, con la distribución t de Student también podemos obtener contrastes válidos.

Supongamos una muestra aleatoria simple $(x_1, \cdots, x_n)$ que se ha obtenido de una población normal con media μ y desviación típica δ desconocida. Si la media y la varianza de la muestra son:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{y} \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

Para un nivel de significación α tenemos los siguientes contrastes de hipótesis:

1) $H_0 : \mu \geq \mu_0$

   $H_1 : \mu < \mu_0$

   Teniendo en cuenta que es un contraste unilateral, en el que la región de rechazo queda definida a la izquierda, y que el estadístico de prueba sigue una distribución t de Student con $(n-1)$ grados de libertad. La región crítica vendrá determinada por:

   $\bar{x} < \mu_0 - t_\alpha \, {}^{s}/\sqrt{n}$

2) $H_0 : \mu \leq \mu_0$

   $H_1 : \mu > \mu_0$

   La región crítica vendrá determinada por:

   $\bar{x} > \mu_0 + t_\alpha \, {}^{s}/\sqrt{n}$

3) $H_0 : \mu = \mu_0$

   $H_1 : \mu \neq \mu_0$

   La región de rechazo viene definida:

   $\bar{x} < \mu_0 - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$; $\qquad \bar{x} > \mu_0 + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$

   y la región de aceptación será:

   $\left[\mu_0 - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

8.5 Resumen y preguntas frecuentes.

- Objetivo de la estimación utilizando contraste de hipótesis.
- ¿Qué es una hipótesis estadística?¿Qué tipos de hipótesis estadísticas podemos realizar en un contraste de hipótesis paramétrico?
- Explique qué es la región crítica y la región de aceptación de un contraste de hipótesis.
- ¿Cuáles son los resultados posibles de nuestra decisión sobre la hipótesis nula en un contraste ?
- Defina el concepto de error de tipo I y II en un contraste de hipótesis paramétrico.¿Cómo se pueden medir?
- Explique el significado que tiene el valor crítico en un contraste de hipótesis paramétrico.
- ¿Qué es la potencia de un contraste de hipótesis?¿Qué es la función de potencia de un contraste de hipótesis?
- ¿Existe alguna relación entre el error de tipo I y el error de tipo II? Explique la respuesta.
- ¿Qué procedimiento se suele seguir para realizar un contraste de hipótesis paramétrico?.
- ¿Qué efecto tiene el nivel de significación o el tamaño de la muestra sobre la potencia de un contraste de hipótesis?
- ¿Qué estadístico se utiliza en un contraste de hipótesis para la media de una población normal si la desviación típica poblacional es conocida? ¿Y si la desviación típica poblacional es desconocida?
- ¿Cómo está delimitada la región crítica y de aceptación en un contraste de hipótesis para la media de una población normal? Explíquelo mediante un gráfico.
- Definición y utilización del p-valor.
- Relación entre los contrastes de hipótesis y los intervalos de confianza.